Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

24-3 | 2020
Lectures et postérités de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin

La Philosophie de l'algèbre, tome II, un témoin de la circulation de la théorie des treillis en France

La Philosophie de l'algèbre, *tome II : An Indicator of Lattice Theory Circulation in France*

Simon Decaens

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2561
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.2561
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 25 octobre 2020
Pagination : 197-217
ISBN : 978-2-84174-
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Simon Decaens, « *La Philosophie de l'algèbre*, tome II, un témoin de la circulation de la théorie des treillis en France », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 24-3 | 2020, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 30 mars 2021. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2561 ; DOI : https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2561

La Philosophie de l'algèbre, tome II, un témoin de la circulation de la théorie des treillis en France

Simon Decaens
Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches sur les Sciences et les Technologies (AHP-PReST), Université de Lorraine, CNRS, Université de Strasbourg, UMR 7117, Nancy (France)

Résumé : La théorie des treillis apparaît dans le contexte des mathématiques états-uniennes des années 1930. En 1940, elle se matérialise sous la forme d'une monographie, qui permet sa circulation. Dans le dernier chapitre du deuxième tome de *La Philosophie de l'algèbre*, Jules Vuillemin la présente comme une « algèbre générale » dont le but est l'étude logique des théories scientifiques. L'article porte sur cette circulation de la théorie des treillis qui sera étudiée selon deux axes. D'une part, en étant diffusée par l'intermédiaire d'un traité, la théorie prend une forme spécifique qu'il s'agira de détailler. D'autre part, la réception de Vuillemin dépend de ses intérêts propres, auxquels nous nous intéresserons.

Abstract: Lattice Theory emerged in the context of 1930s American mathematics. In 1940, it became materialized in the form of a monograph which enabled it to be disseminated. In the last chapter of the second volume of *La Philosophie de l'algèbre*, Jules Vuillemin presents it as a « general algebra » the aim of which is the logical study of scientific theories. The article focuses on this circulation of Lattice Theory which will be studied from two perspectives. Firstly, the theory was disseminated by a treatise and thus has a specific form that will be detailed. Secondly, Vuillemin's opinions are coloured by his own interests which are studied.

1 Introduction

Le douzième et dernier chapitre du deuxième tome de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin inédit] s'intitule « L'Algèbre générale ». Pour Jules Vuillemin, cette algèbre générale est la forme mathématique de la théorie de la connaissance [Vuillemin inédit, 330] et consiste, en pratique, en l'étude algébrique des théories scientifiques grâce à un nouvel outil : les treillis [1]. La théorie des treillis apparaît dans les travaux de mathématicien·nes états-unien·nes des années 1930 [2]. Rapidemment et grâce à l'American Mathematical Society, elle acquiert un statut important. En 1938, elle est l'objet d'un *symposium* ; en 1940, d'une monographie ; en 1941, d'un colloque [Decaens 2018, 210–225]. La théorie des treillis dispose ainsi d'une grande visibilité qui favorise sa diffusion. Dans cet article, nous envisagerons le chapitre 12 de *La Philosophie de l'algèbre* (tome II) comme une réception particulière de cette théorie.

Pourtant, Vuillemin n'accède pas à *la* théorie au sens de l'ensemble immatériel de toutes les définitions, théorèmes et méthodes qui lui sont liées [3]. Au contraire, il me semble important de ne pas séparer la circulation d'une théorie des conditions matérielles qui la permettent [4]. Or, la référence principale de Vuillemin sur les treillis est la deuxième édition du traité *Lattice Theory* de Garrett Birkhoff [Birkhoff 1948]. La théorie des treillis qu'il appréhende est celle présentée dans le livre [5], pas un ensemble immatériel d'idées aux contours flous. La seconde édition de *Lattice Theory*, remaniée et largement enrichie, paraît huit ans après la première [Birkhoff 1940] et devient la référence canonique sur le sujet jusque dans les années 1960, quand de nouvelles monographies paraissent [Decaens 2018, Annexe A]. En abordant la théorie des treillis par le biais du traité de Birkhoff, Vuillemin se réfère à une version particulière de la théorie, qui influence sa compréhension du sujet.

Dans cet article, nous nous intéresserons à l'histoire des treillis par le biais de la circulation de la théorie, depuis des mathématicien·nes états-unien·nes vers un philosophe français. D'une part, ce travail permet de contextualiser l'écriture de *La Philosophie de l'algèbre* en la situant par rapport à l'histoire de la théorie des treillis. D'autre part, il informe sur la diffusion des treillis en considérant l'ouvrage de Vuillemin comme un témoin de cette circulation. Le but de la première section est d'historiciser quelques caractéristiques de la théorie des treillis, telle qu'elle apparaît dans la deuxième édition du traité *Lattice Theory*. Il s'agira de montrer que la monographie matérialise une

1. Pour des précisions mathématiques sur la théorie des treillis voir [Grätzer 1996].
2. Sur l'histoire de la théorie des treillis voir [Mehrtens 1979], [Decaens 2018] et [Haffner 2019].
3. Pour une discussion de l'utilisation de la catégorie historiographique de *théorie* voir [Fisher 1966, 1967] et [Decaens 2018].
4. Sur les circulations mathématiques, voir [Nabonnand, Peiffer *et al.* 2015].
5. Ce qui ne signifie pas pour autant que la compréhension de Vuillemin de la théorie des treillis se limite au contenu de *Lattice Theory*.

forme particulière de la théorie, résultat d'une construction historique. Dans la deuxième section, nous nous intéresserons à la présentation de l'algèbre générale (et des treillis) par Vuillemin. Comment s'approprie-t-il la théorie et quelles sont les spécificités de sa réception des treillis ?

2 *Lattice Theory*, une forme matérielle de la théorie des treillis

La théorie des treillis n'est pas un objet fixe, défini une fois pour toutes et sujet uniquement à des développements intrinsèques. Selon les acteurs et actrices, les lieux et les moments où elle est considérée, sa forme et ses contours sont variables et font débat. En publiant une monographie sur le sujet, Birkhoff stabilise la théorie et bénéficie d'un support pour imposer sa propre définition. Dans cette section nous nous concentrerons sur quelques caractéristiques de *cette* théorie des treillis : le statut des treillis au sein de l'algèbre abstraite ; leurs liens avec les algèbres de Boole et l'écriture de leur histoire. En nous restreignant à quelques éléments de la théorie, il sera possible de décrire finement leur construction historique.

2.1 Les treillis : un outil algébrique pour l'étude de l'algèbre

Le premier article de Birkhoff sur la notion de treillis paraît en 1933 [Birkhoff 1933]. L'auteur y propose explicitement de développer une « théorie des treillis » qu'il inscrit immédiatement au sein de l'algèbre abstraite. Il entend, d'une part, traiter de l'algèbre abstraite depuis un « point de vue privilégié » combinatoire et, d'autre part, formaliser l'algèbre abstraite au sens de Bartel L. van der Waerden [van der Waerden 1930], c'est-à-dire, donner une « définition technique » incluant entre autres les groupes, les anneaux, les algèbres linéaires et les algèbres de Boole. Précisons ces objectifs.

Dans son traité sur l'algèbre abstraite, van der Waerden envisage les groupes, anneaux et corps comme un même type d'objet, mais ne définit pas de notion englobante dont chacun serait un cas particulier. Birkhoff fournit précisément cette définition avec les « algèbres généralisées » : un ensemble muni d'opérations internes [Decaens 2018, 76]. Il se donne ainsi une notion très générale dont les groupes, anneaux, etc. sont des cas particuliers. De plus, cette définition permet de retrouver des notions usuelles de l'algèbre abstraite, à l'aide d'objets plus généraux. Par exemple, les sous-groupes ou sous-anneaux sont des cas particuliers de « sous-algèbres » [Decaens 2018, 77]. Birkhoff formalise ainsi la similarité entre les différents objets considérés par van der Waerden. Enfin, écrit-il, un treillis est une algèbre au sens précédent et donc, un objet comparable aux objets classiques de l'algèbre abstraite. La notion d'algèbre généralisée permet alors à la fois de formaliser un air de famille entre les différents objets de l'algèbre abstraite et d'insérer les treillis parmi ces objets.

Le second objectif de Birkhoff est de proposer une approche combinatoire de l'algèbre abstraite. En pratique, il s'intéresse à des opérations entre sous-algèbres d'une algèbre généralisée ; principalement à des unions et intersections [Decaens 2018, 60]. Muni de ces opérations, l'ensemble des sous-algèbres d'une algèbre constitue un treillis. Ainsi, un treillis est avant tout une structure qui permet d'étudier des unions et intersections (et donc des combinaisons) de sous-algèbres. Dès lors, Birkhoff entend caractériser une algèbre à partir de la forme du treillis de ses sous-algèbres. Par exemple, l'ensemble des sous-groupes normaux d'un groupe forme un treillis d'un type particulier, appelé « modulaire » [Birkhoff 1948, 65], tandis qu'un treillis formé de sous-groupes quelconques n'est pas modulaire en général. Par conséquent, une caractéristique de treillis distingue les sous-groupes normaux, un objet important de la théorie des groupes, des autres sous-groupes. De plus, la modularité permet également de distinguer un treillis d'idéaux d'un anneau d'un treillis de sous-anneaux quelconques. L'approche combinatoire des algèbres permet donc de saisir des propriétés importantes des algèbres et s'applique de façon transversale.

Birkhoff n'utilise pas immédiatement les treillis comme outils pour une algèbre de l'algèbre mais se sert de la notion d'algèbre généralisée pour justifier doublement l'introduction des treillis (ce sont des algèbres et un ensemble de sous-algèbres est un treillis). Son glissement d'intérêt vers les algèbres elles-mêmes se manifeste plus particulièrement dans un nouvel article dont le titre, « On the Structure of Abstract Algebras » [Birkhoff 1935], montre bien le revirement de l'auteur des « combinaisons de sous-algèbres » à « la structure des algèbres abstraites ». Birkhoff explique d'ailleurs vouloir mener « une étude des algèbres abstraites en tant qu'algèbres abstraites » [Birkhoff 1935, 433, je traduis]. Effectivement, il développe dans cet article des outils sur les algèbres elles-mêmes, comme le « produit direct » d'algèbres ou l'« espèce [6] » d'une algèbre. Il énonce également des théorèmes sur les algèbres, l'exemple principal étant le théorème aujourd'hui appelé « théorème HSP » [Birkhoff 1935, 441]. Les treillis ne sont plus ici l'objet d'intérêt principal mais jouent leur rôle d'outil pour l'étude des algèbres.

Les travaux sur les treillis des années 1930 et 1940 reprennent peu l'étude des algèbres au sens général précédent, mais s'emparent plutôt des treillis soit comme objet d'intérêt propre, soit comme outil pour des domaines classiques des mathématiques [Decaens 2018, chap. 3]. Birkhoff écrit de nouveau sur le sujet dans deux articles [Birkhoff 1944, 1945], où il introduit le nom d'« algèbre universelle [7] ». Dans la deuxième édition de *Lattice Theory*, il insère

6. En termes actuels, « signature ».

7. Cette dénomination qui apparaît déjà dans *Lattice Theory* [Birkhoff 1940] fait référence à un traité d'Alfred N. Whitehead [Whitehead 1898].

un avant-propos sur l'algèbre qui commence par présenter son point de vue général [Birkhoff 1948, vii, je traduis]. Il suppose son lectorat « familier » des différents « types d'algèbre » (groupes, anneaux, espaces vectoriels) et donne des « définitions extrêmement générales » de manière à se placer à un « degré de généralité adéquat » pour pouvoir traiter de « *toutes* ces algèbres ». Ainsi, bien que peu de travaux aient été consacrés à l'étude des algèbres en tant que structures englobantes, Birkhoff les introduit comme des objets nécessaires pour énoncer des résultats généraux.

De nouveau, cette définition lui permet de présenter les treillis comme des algèbres en les comparant aux structures usuelles de l'algèbre abstraite et de justifier de leur « appliquer la terminologie générale de l'algèbre abstraite » [Birkhoff 1948, 19, je traduis] (c'est-à-dire, par exemple, de définir des sous-treillis ou des (iso)morphismes de treillis). De plus, il donne un certain nombre de théorèmes vrais pour une algèbre quelconque, qui sont donc valables pour un groupe, un anneau ou un treillis. Ces résultats sont aussi bien des généralisations de théorèmes connus pour des algèbres particulières (la généralisation du théorème de Jordan-Hölder [Birkhoff 1948, 88]) que des théorèmes originaux (le théorème de représentation d'une algèbre comme union sous-directe d'algèbres sous-directement irréductibles [Birkhoff 1948, 92]). Comme nous l'avons vu, les treillis bénéficient également d'une réflexivité puisqu'ils sont un outil pour l'étude des algèbres. Ainsi, ils ne permettent pas seulement de saisir ce qui est commun à différentes structures mais d'aborder ce commun à un niveau de généralité supérieur. La théorie des treillis est ainsi autant une théorie algébrique qu'une théorie de l'algèbre.

2.2 Présenter les algèbres de Boole comme des treillis particuliers

À partir de 1933, Marshall H. Stone publie une série d'articles dans lesquels il propose d'aborder les algèbres de Boole par les méthodes de l'algèbre abstraite [8]. Dans un premier article [Stone 1934], il envisage seulement une analogie entre algèbres de Boole et anneaux : puisque les deux sont définis à partir d'une addition et d'une multiplication, il suggère d'utiliser des outils de théorie des anneaux (les morphismes, idéaux et quotients) sur les algèbres de Boole. Son but n'est pas l'étude algébrique des algèbres de Boole, il s'agit seulement d'un préliminaire à l'utilisation des algèbres de Boole en topologie. Cependant, ces définitions lui permettent, à partir d'une algèbre de Boole, de construire une « algèbre d'ensembles », c'est-à-dire un ensemble d'ensembles muni des opérations d'union et d'intersection, analogues aux sommes et produits de l'algèbre de Boole de départ [Stone 1934, 198]. Ce théorème sera dit « de représentation », il permet de représenter les

8. À ce sujet, voir [Serfati 2013].

éléments et opérations abstraites d'une algèbre de Boole par des ensembles et des opérations sur les ensembles.

À la suite du théorème, Stone précise qu'« [u]n théorème plus général a été ensuite obtenu et publié par Garrett Birkhoff » [Stone 1934, 202, je traduis]. Il revendique donc un théorème inédit, tout en attribuant à Birkhoff un résultat similaire. Ce dernier a en effet montré qu'un ensemble d'algèbres formant un treillis distributif est isomorphe à une classe d'ensembles [Birkhoff 1933, 461]. Stone identifie donc des théorèmes qui établissent une correspondance entre un objet abstrait (une algèbre de Boole ou un treillis distributif) et un ensemble d'ensembles. Il les distingue toutefois selon deux niveaux de généralité. De manière informelle, il établit ainsi un lien entre algèbres de Boole et treillis, d'une part, et entre ses travaux et ceux de Birkhoff, d'autre part. Dans les années suivantes, Stone montre en fait qu'une algèbre de Boole, plus qu'un simple analogue, est un anneau à part entière [Stone 1935]. Comme Birkhoff, il justifie donc de placer les algèbres de Boole au sein de l'algèbre abstraite, ce qui l'amène à une « révision radicale » de ses recherches. De plus, Holbrook MacNeille, un étudiant de Stone et Birkhoff, montre dans son doctorat comment construire une algèbre de Boole à partir d'un treillis distributif par « une construction purement algébrique ». Il formalise ainsi les liens établis par Stone et Birkhoff entre leurs travaux [Decaens 2018, 155–159].

Dès lors, les résultats obtenus sur les algèbres de Boole peuvent servir de modèles à une étude algébrique des treillis distributifs, ce que font Stone et Birkhoff, chacun dans un article sur la représentation d'un treillis distributif par un ensemble d'ensembles. L'article de Stone [Stone 1937] consiste essentiellement à reprendre ses travaux sur les algèbres de Boole dans le cas des treillis distributifs. Dans son article [Birkhoff 1937], Birkhoff introduit la notion d'anneau d'ensembles : un ensemble d'ensembles muni des opérations d'union et d'intersection et vérifiant (entre autres) les propriétés d'un anneau. En laissant de côté la nature des éléments d'un tel anneau (c'est-à-dire en oubliant que ce sont des ensembles), écrit Birkhoff, tout anneau d'ensembles est un treillis distributif. Le théorème de représentation garantit, réciproquement, que tout treillis distributif est un certain anneau d'ensembles. Birkhoff propose donc un théorème analogue au théorème de représentation des algèbres de Boole et inscrit son travail dans la continuité de celui de Stone, qui a développé « [u]ne théorie complète de la représentation pour les algèbres de Boole par des corps d'ensembles » [Birkhoff 1937, 447, je traduis]. Ainsi, Birkhoff renforce les liens entre les treillis distributifs et les algèbres de Boole et établit un parallèle entre, d'une part, treillis distributifs et algèbres de Boole et, d'autre part, anneaux et corps. En effet, dans une algèbre de Boole et dans un corps tout élément possède un inverse, ce qui n'est pas le cas dans un treillis distributif et dans un anneau. Le rapprochement entre treillis distributifs et algèbres de Boole est ainsi formalisé et comparé à la relation entre anneaux et corps, usuelle en algèbre abstraite.

Les liens établis entre treillis et algèbres de Boole permettent à Birkhoff d'inclure ces dernières dans la théorie des treillis. Lors du *symposium* de 1938 sur la théorie des treillis [Decaens 2018, 211–212], par exemple, Stone présente son théorème de représentation d'une algèbre de Boole et ne mentionne les treillis que brièvement. Dans *Lattice Theory* [Birkhoff 1948], le chapitre 10 est consacré aux algèbres de Boole. Birkhoff définit les algèbres de Boole comme des treillis particuliers puis comme des anneaux et énonce le théorème de représentation. La théorie des treillis intègre ainsi le lien construit par Birkhoff, Stone et MacNeille avec les algèbres de Boole.

2.3 Une histoire des treillis comme aboutissement de l'algèbre abstraite et de l'algèbre de la logique

Quelques mois après la publication de son premier article sur les treillis [Birkhoff 1933], Birkhoff le complète par une note d'une page [Birkhoff 1934] dans laquelle il écrit avoir été informé par Øystein Ore [9] de la similarité de ses travaux avec ceux de Richard Dedekind. Son but est d'annoncer ce lien. Pour cela, il liste des définitions formellement équivalentes et des théorèmes présents chez Dedekind, certains étant cependant « implicites », « sous-entendus » ou même seulement « présagés ». Par ailleurs, la comparaison permet également de souligner l'originalité de certains de ses résultats. Birkhoff et Ore, qui publie également sur les treillis [Corry 2004, chap. 6], [Decaens 2018, chap. 2], construisent la figure d'un Dedekind fondateur de la théorie des treillis. Ils se donnent cet ancêtre et l'impliquent dans l'histoire de la théorie. La figure de Dedekind est même mobilisée par exemple dans des querelles de priorité ou pour inscrire les treillis dans l'histoire de l'algèbre abstraite [Decaens 2018, 86–89].

L'insertion des treillis dans l'histoire de l'algèbre se fait également dans des discours historiques, comme celui d'Eric T. Bell pour le cinquantenaire de l'American Mathematical Society [Decaens 2018, 176–183]. Bell fait de l'« abstraction » le moteur du développement des mathématiques (qui progressent du particulier au général). Or, ce qu'il nomme « l'algèbre abstraite américaine [10] » est précisément la théorie des treillis. Il réserve son dernier paragraphe à une présentation élogieuse des treillis, valorisant leur abstraction et leur pouvoir unificateur. Cette algèbre abstraite, explique Bell, trouve « ses racines » dans les travaux de Dedekind et se développe en Allemagne puis aux États-Unis, dans les travaux de Birkhoff et Ore (qu'il présente). Par ailleurs, Bell construit également une rupture, d'une part, entre l'algèbre abstraite et « l'algèbre linéaire » et, d'autre part, entre la nouvelle théorie des treillis et les mathématiques précédentes. Ainsi, il fait de la théorie des treillis une nouvelle algèbre, aboutissement (le plus abstrait) de l'algèbre abstraite.

9. Ore, Robert Fiske et Emmy Noether viennent alors d'éditer les œuvres de Dedekind [Dedekind 1930-1932].

10. Pour Bell, l'algèbre états-unienne se distingue par son abstraction. Sur l'utilisation de frontières nationales en histoire des mathématiques, voir [Mehrtens 1996], [Parshall 1996] et [Goldstein 2007].

Dans *The Development of Mathematics* [Bell 1945], Bell fait de nouveau une présentation sans réserve de la théorie des treillis, achèvement de l'histoire de l'algèbre. Dedekind est présenté comme un père fondateur des treillis, ce qui prouve « son génie perspicace et prophétique » [Bell 1945, 285, je traduis]. L'importance de Dedekind dans l'histoire de l'algèbre renforce la pertinence de l'étude des treillis qui, en retour, participe à la construction de la figure du mathématicien génial. Par ailleurs, Bell rend historiques les liens entre treillis et algèbres de Boole. Les treillis sont définis comme une continuité aux algèbres de Boole et George Boole est présenté comme un autre père fondateur de la théorie des treillis, ayant « anticipé » son importance « sans la réaliser ». Finalement, écrit Bell, « [l]'algèbre de Boole, la source historique de la théorie des treillis, a trouvé sa place naturelle dans la théorie comme un type particulier de treillis » [Bell 1945, 261, je traduis]. Le livre connaît un certain succès et est, en particulier, la seule référence historiographique citée par Vuillemin dans le douzième chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, tome II.

Lattice Theory intègre une certaine histoire de la théorie des treillis, qui inclut notamment les éléments précédents. Birkhoff présente « [l]e développement de la théorie des treillis » en trois phases : l'algèbre de la logique ; les premiers articles des années 1930 ; et les travaux développant la théorie établie dans les années 1940 [Birkhoff 1948, iii]. Il place ainsi la théorie des treillis dans un double héritage : celui de l'algèbre de la logique (intégré à l'histoire des treillis) et celui de l'algèbre abstraite. Birkhoff fait ainsi des treillis une réception états-unienne de l'algèbre abstraite et accentue l'effet de rupture entre les deux. Enfin, comme Bell, il fait des algèbres de Boole l'origine des treillis [Birkhoff 1948, 152], les liens formels entre treillis et algèbres de Boole justifiant de réunir leurs histoires. En conclusion l'histoire des treillis est présentée comme un point final et un point de rencontre entre les histoires de l'algèbre abstraite et de l'algèbre de la logique.

3 Algèbre générale et treillis dans *La Philosophie de l'Algèbre*

L'édition de *Lattice Theory* fige une forme particulière de la théorie des treillis et permet sa circulation géographique et temporelle. Comme le note Herbert Mehrtens, la théorie se diffuse largement à l'échelle internationale, notamment en France [Mehrtens 1979]. Intéressons-nous maintenant au douzième chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, t. II qui témoigne d'une réception particulière des treillis. Le parcours qui amène Vuillemin à s'intéresser aux treillis est pour l'instant inconnu [11]. Cela dit, il n'est pas le seul acteur de la circulation des treillis en France. Avant lui, plusieurs auteurs et autrices

11. Voir cependant [Maronne 2014].

s'intéressent aux treillis et publient sur le sujet en français. J'essayerai dans un premier temps de dresser un panorama de ces recherches avant 1962, date de la publication du premier tome de *La Philosophie de l'Algèbre* [Vuillemin 1962]. Dans un second temps, je présenterai en détail le chapitre de Vuillemin sur l'« algèbre générale » en montrant les circulations dont il témoigne et les spécificités de sa réception des treillis.

3.1 Des treillis en France avant Vuillemin

Des publications sur les treillis paraissent en français dès le milieu des années 1930. Ore publie en 1936 une présentation générale de l'algèbre abstraite en français [Ore 1936*a*]. C'est alors un spécialiste reconnu de l'algèbre abstraite et joue un rôle clé pour la promotion des treillis [Corry 2004], [Decaens 2018]. Son but est de donner un panorama général de l'étude des « systèmes algébriques ». Il présente à la suite les corps, les anneaux, les algèbres linéaires, les groupes et enfin les treillis. Ceci lui permet de faire des treillis une partie légitime de l'algèbre abstraite. De plus, bien que la section sur les treillis soit très courte (même relativement aux autres), Ore insiste sur leur intérêt transversal, du fait de leur importance dans les théorèmes de décomposition présents dans chaque théorie algébrique. Ce sont ces théorèmes qui permettent décrire les « propriétés structurelles ». Ore profite de même de son invitation au dixième Congrès International des Mathématiciens pour promouvoir les treillis comme outil de décomposition, c'est-à-dire de réduction d'un système en parties plus simples [Ore 1936*b*]. Comme nous le verrons, cet usage des treillis sera également mis en avant par Vuillemin.

En 1938, Valère Glivenko est l'auteur d'un nouveau fascicule [Glivenko 1938], dans la même série que Ore, où il traite de treillis. Ces derniers donnent accès aux « fondements de plusieurs disciplines mathématiques d'une façon permettant de comprendre ce qui est commun à ces disciplines et ce qui leur est spécifique » [Glivenko 1938, 3]. Il dépasse même le cadre de l'algèbre, en proposant d'utiliser les treillis en géométrie projective, en topologie, en probabilités et en logique. À la différence de Ore, Glivenko consacre l'intégralité de son exposé aux treillis. Il commence par définir les treillis et donne le théorème de Jordan-Hölder avant de s'intéresser à des treillis munis d'une topologie et notamment aux travaux sur les treillis distributifs et les algèbres de Boole (présentés à la section précédente). Notons que Glivenko propose d'utiliser les treillis en logique. Parmi d'autres exemples de treillis, il donne celui d'un treillis constitué par un ensemble de propositions, muni de la conjonction et de la disjonction. Cette algébrisation de la logique constitue une pratique des treillis importante pour Vuillemin.

À partir de 1938, Paul et Marie-Louise Dubreil-Jacotin publient une série d'articles sur les treillis constitués des relations d'équivalence sur un ensemble [12]. Ce treillis permet de « généraliser » des théorèmes comme les

12. Pour une présentation de ces travaux, voir [Hollings 2014, chap. 7].

théorèmes d'isomorphisme ou de Jordan-Hölder (valables pour des groupes ou des anneaux) à un ensemble quelconque. Autrement dit, Dubreil et Dubreil-Jacotin se donnent les moyens d'énoncer ces théorèmes sans recourir à la nature particulière des structures sur lesquelles ils sont valables, les treillis se substituant aux outils usuels mais particuliers (à la théorie des groupes, par exemple). Ces travaux sont le point de départ de recherches algébriques sur les treillis et les relations, dont l'histoire est à faire. En 1941, Dubreil est chargé d'une série de conférences d'algèbre qui donnent lieu à un traité [Dubreil 1946]. Dans sa présentation de l'ouvrage, Gaston Julia mentionne l'héritage de « l'École américaine, particulièrement de Ø. Ore et Birkhoff » [Dubreil 1946, vi]. Pourtant, la notion « fondamentale » est celle d'équivalence et Dubreil ne mentionne pas les treillis, même s'il reprend des outils sur les équivalences introduit dans ce cadre.

Les treillis font toutefois l'objet de publications de recherche en France et apparaissent également dans des contextes d'enseignement. Entre 1945 et 1947, Albert Châtelet [13] profite de son cours à la Sorbonne pour exposer sur les treillis modulaires et les treillis de relations d'équivalence [Châtelet 1945, 1946]. À la suite, il publie un article sur les treillis [Châtelet 1947*b*] mais, comme Dubreil, s'oriente ensuite plutôt vers l'étude des relations [Châtelet 1947*a*]. Dubreil-Jacotin utilise sa position de professeuse à l'université de Poitiers pour diffuser les treillis. Ses étudiants, Léonce Lesieur et Robert Croisot, travaillent sur le sujet dans le cadre de leur doctorat et assurent avec elle un cours, qui donne lieu à la publication d'un traité [Dubreil-Jacotin, Lesieur *et al.* 1953].

Les treillis font également l'objet de réticences. Dans une lettre de 1946 à Henri Cartan, par exemple, André Weil critique les treillis et la « fausse généralité » qu'ils engendrent [Audin 2010, 120]. Pour lui, l'abstraction n'est pas un but en soi mais un outil pour l'économie des moyens. Unifier des démonstrations à l'aide des treillis pour finalement énoncer chaque résultat particulier est vide de sens. Dans les *Éléments de mathématiques*, [Bourbaki 1957] le groupe Bourbaki a considéré l'inclusion des treillis, pour finalement les rejeter. Dans l'état 3 (ou 4) du chapitre 4, les treillis sont présentés sous le nom d'« ensembles réticulés » sans être particulièrement importants. Au contraire, dans l'état 5 (où la dénomination « treillis » apparaît) Bourbaki écrit que ces ensembles ont une « une importance fondamentale dans toute la Mathématique » [Bourbaki NAa, 68] avant de retirer cet avis dans l'état 6 [Bourbaki NAb, 79]. La place des treillis est ainsi discutée. Notons qu'il n'est pas question de faire une étude algébrique des treillis. Il s'agit plutôt de caractériser certains ensembles ordonnés que d'utiliser les treillis comme outils pour l'algèbre abstraite, encore moins d'ajouter une nouvelle structure algébrique comme le font Ore ou Birkhoff. D'ailleurs, contrairement à eux, Bourbaki ne définit pas un treillis par des opérations mais seulement à partir de son ordre.

13. Sur Châtelet, voir [Gauthier & Goldstein 2013], [Radtka 2018] et [Gauthier à paraître].

Dresser un panorama détaillé du développement d'une théorie des treillis en France et de ses interactions avec d'autres domaines des mathématiques est un sujet à part entière, qui dépasse le cadre de cet article [14]. Ici, j'ai tenté de donner quelques pistes pour comprendre l'intérêt de Vuillemin pour les treillis. Comme nous allons le voir dans les sections suivantes, sa lecture des treillis incorpore des éléments que nous avons rencontrés dans les travaux précédents : un grand intérêt pour les théorèmes de décomposition, une approche de la logique grâce aux treillis et une volonté de fonder l'algèbre sur les treillis.

3.2 L'algèbre générale, une algèbre de l'algèbre

Abordons maintenant le douzième chapitre de *La Philosophie de l'algèbre*, t. II, « L'Algèbre générale ». C'est le dernier chapitre du livre avant la conclusion. Il est composé d'une première partie mathématique et philosophique, motivant l'introduction des treillis, puis d'une présentation mathématique des treillis et des algèbres de Boole. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à un point capital de l'algèbre générale pour Vuillemin : sa réflexivité ; l'algèbre générale a pour objet d'étude l'algèbre elle-même.

La première définition, informelle, de l'algèbre générale donnée par Vuillemin est qu'elle est une « Algèbre des structures » ; « structure » devant s'entendre au sens usuel en algèbre abstraite d'un ensemble muni d'opérations (un groupe, un anneau, un corps, etc.). Premièrement, l'algèbre générale a pour objets les structures et est, en ce sens, une « algèbre au second degré ». Elle se distingue de l'algèbre abstraite, qui s'intéresse aux théorèmes valables au sein d'une structure mais pas aux théorèmes sur les structures elles-mêmes. Deuxièmement, elle permet de considérer toutes les structures « dans leurs variations relatives aux adjonctions d'axiomes de plus en plus particuliers » [Vuillemin inédit, 326]. Il s'agit donc de s'intéresser aux structures les plus générales, pour ensuite restreindre son propos à des structures particulières. Comme le note Vuillemin, le théorème de Wedderburn, qui permet de décomposer une algèbre linéaire en un produit d'algèbres, est « intermédiaire », puisqu'il a bien pour objet la décomposition de structures mais qu'il ne vaut pas pour *toutes* les structures (il ne concerne que les algèbres linéaires associatives). Ainsi, écrit-il, ce théorème permet de constater « des analogies qu'on peut établir entre les structures algébriques et les algèbres des structures » [Vuillemin inédit, 327–328]. Dans une structure algébrique, des théorèmes portent sur la décomposition d'éléments en éléments plus simples, de la même manière que le théorème de Wedderburn permet la décomposition d'une structure en structures plus simples. La distinction entre « algèbre abstraite » et « algèbre générale » est finalement la suivante : « tandis que l'Algèbre abstraite étudiait systématiquement les diverses structures [...], l'Algèbre générale part de définitions s'appliquant à toutes ces Algèbres particulières »

14. Christophe Eckes a attiré mon attention sur l'importance des travaux d'Albert Lautman, voir [Lautman 2006] et [Eckes à paraître].

[Vuillemin inédit, 329]. Premièrement, l'algèbre générale a donc pour objets les structures plutôt que les éléments des structures. Deuxièmement, elle porte sur toutes les structures plutôt que sur une structure particulière.

Pour ce faire, explique Vuillemin, il faut commencer par se débarrasser des considérations sur la nature des éléments dont sont composées les structures. Ainsi, si l'algèbre générale garde la notion d'opérations agissant sur des éléments, la nature de ces éléments est « abstraite », c'est-à-dire non spécifiée. Par exemple, il ne s'agit plus d'opérations entre des nombres entiers ou des éléments d'un groupe. De plus, l'algèbre générale permet d'opérer non seulement sur les éléments d'une structure, mais également sur ses sous-structures (par exemple sur les sous-groupes d'un groupe). Autrement dit, elle permet d'énoncer des résultats sur une structure sans se référer aux éléments qui la composent. Ainsi, écrit Vuillemin :

> Une telle théorie s'intéresse donc non plus à des éléments particuliers comme l'ancienne Algèbre, non plus même à la structure abstraite qui relie des éléments non particularisés, comme l'Algèbre abstraite, mais [à] l'ensemble des relations entre une structure et les formes structurales qu'on peut y établir. [Vuillemin inédit, 329]

Notons que cette volonté explicite de se débarrasser des éléments pour ne s'intéresser qu'à la structure qu'ils forment est exprimée par Ore dès 1935 [Ore 1935, 406] et reprise par Bell [Bell 1945, 259]. Une fois ce programme établi, il est toutefois utile de retrouver des objets familiers de l'algèbre abstraite. Ainsi, de même que la définition de sous-structure généralise les notions de sous-groupe ou de sous-anneau, il convient de généraliser des outils comme ceux d'isomorphisme, de congruence ou d'homomorphisme. Pour cela, Vuillemin introduit un nouvel outil : les treillis.

Vuillemin présente les treillis comme « la relation la plus générale entre une Algèbre et ses sous-Algèbres » [Vuillemin inédit, 329]. Il insiste sur leur importance puisque « la théorie jouera, sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'Algèbre abstraite » [Vuillemin inédit, 329–330]. En effet, dans les chapitres précédents, Vuillemin pointe le rôle d'exemple qu'a joué la théorie des groupes pour l'algèbre abstraite. Les concepts, méthodes et résultats de la théorie des groupes ont servi de modèles pour l'étude d'autres structures, d'où leur rôle unificateur. Il résume : « [l]e groupe était un exemplaire objet d'étude ; mais c'était par analogie seulement qu'on pouvait l'incorporer à l'étude de la pensée » [Vuillemin inédit, 330]. En algèbre générale, il ne s'agit plus seulement de proposer une méthode commune pour l'étude des différentes structures, mais de traiter toutes les structures de manière générale, ce que permet la théorie des treillis. « Une fois reconnue la forme unifiante », les treillis doivent être abordés comme « une théorie indépendante pour ses propres mérites », conclut Vuillemin [Vuillemin inédit, 332].

Pour donner la définition formelle d'un treillis, Vuillemin utilise trois exemples de couples d'opérations réciproques : prendre le pgcd et ppcm de deux nombres, prendre le minimum et le maximum de deux nombres et prendre l'union et l'intersection de deux ensembles. Ces trois couples d'opérations ont des propriétés communes : l'idempotence, la commutativité, l'associativité et l'absorption [Vuillemin inédit, 335], qui sont précisément les axiomes des treillis. Vuillemin propose donc immédiatement trois exemples de treillis, pour chaque couple d'opérations : l'ensemble des nombres naturels pour les deux premiers, l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble pour le dernier. Par ailleurs, un treillis est bien un objet algébrique puisque « l'existence de deux lois de composition sur un treillis rend évidente l'analogie d'une telle structure avec les structures proprement algébriques » [Vuillemin inédit, 340]. Il légitime ainsi le traitement algébrique des treillis, c'est-à-dire l'application des objets usuels de l'algèbre abstraite aux treillis (isomorphisme, congruence, somme, etc.). Finalement,

> [l]a tâche fondamentale de l'Algèbre générale consiste à étudier systématiquement cette structure quasi-algébrique, et à examiner à quelles conditions elle assure, dans le cas général où l'on a affaire non plus aux nombres, mais aux théories déductives elles-mêmes, la décomposition élémentaire unique souhaitée. [Vuillemin inédit, 336–337]

Ainsi, l'algèbre générale est l'étude des treillis en tant que structure algébrique. Ses objets sont les structures elle-mêmes. De plus, ces structures étant des « théories déductives », les treillis formalisent en général l'étude du raisonnement.

3.3 Une décomposition des connaissances complexes en connaissances simples

Pour Vuillemin, l'algèbre générale n'importe pas seulement pour sa généralité ou sa réflexivité. Elle est également une algèbre de la connaissance. Il écrit :

> [l]'Algèbre abstraite demeurait un objet pour la théorie de la connaissance. L'Algèbre générale n'est autre que cette théorie elle-même, exprimée sous la forme symbolique des mathématiques. [Vuillemin inédit, 330]

Les treillis permettent donc une formalisation de la connaissance, c'est-à-dire une théorie de la science « en faisant l'économie d'une référence constante au sens » [Vuillemin inédit, 330]. Autrement dit, l'algèbre générale a pour objet la forme des théories scientifiques et donc leur validité. Ainsi, conclut Vuillemin, elle se confond avec la philosophie théorique. Il poursuit :

> dans la mesure où le problème fondamental de la philosophie théorique consiste dans l'examen de la nature des théories scientifiques, c'est-à-dire des systèmes déductifs et de leur rapport aux différentes sous-théories ou « parties » qui le composent, on

> voit que ce problème fondamental se confond avec celui de la décomposition élémentaire d'une théorie. [Vuillemin inédit, 331]

La philosophie théorique et l'algèbre générale étant identifiées, la seconde peut maintenant aborder les problèmes de la première. Ici, le « problème fondamental » qui se pose est la décomposition d'une théorie en parties plus élémentaires. On retrouve la question de la décomposition d'une structure, à laquelle répondait le théorème de Wedderburn (vu dans la section précédente) pour les algèbres linéaires. Plus généralement, il s'agit maintenant de s'intéresser au problème de la décomposition dans une algèbre générale.

Les treillis permettent la formalisation de la décomposition des systèmes déductifs. Dans les chapitres précédents, Vuillemin a décrit la démarche de Dedekind pour étendre le théorème fondamental de l'arithmétique sur les nombres entiers à des domaines plus larges de nombres algébriques. Ceci, explique-t-il, est rendu possible en remplaçant la relation de divisibilité entre nombres entiers par celle d'inclusion entre ensembles de nombres algébriques. Effectivement, la décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers a pour analogue une décomposition de tout ensemble de nombres algébriques en un produit de certains ensembles (dits premiers), ce produit étant lui-même un ensemble inclus dans l'ensemble décomposé. Vuillemin qualifie ce mouvement d'« interprétation logique d'une opération qui primitivement n'avait de sens qu'arithmétique » [Vuillemin inédit, 322], la relation de divisibilité étant « arithmétique », tandis que celle d'inclusion est « logique ». Or, comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, un treillis décrit aussi bien un ensemble de nombres muni du pgcd et du ppcm qu'un ensemble d'ensembles muni de l'union et de l'intersection. Vuillemin l'exprime par le terme d'« abstraction » : la relation de division perd son sens « concret » lié aux nombres entiers pour prendre un sens plus général, c'est-à-dire une relation d'ordre dans un treillis. Au final, les treillis décrivent donc la forme de ces théories (des nombres ou des ensembles) en faisant abstraction de la nature des éléments ou des opérations impliquées. Ceci explique « la véritable raison mathématique de la subordination des mathématiques à la logique » [Vuillemin inédit, 325]. Ainsi, les treillis sont des « structures mi-logiques, mi-algébriques » [Vuillemin inédit, 326] en deux sens. Premièrement, ils décrivent la forme d'une théorie plutôt que son contenu, c'est-à-dire la structure plutôt que les éléments la composant. Deuxièmement, ils permettent de s'intéresser à des théories logiques, comme la théorie des ensembles, par des méthodes algébriques.

De la même manière que l'étude des ensembles prolonge celle des nombres, remarque Vuillemin, les théorèmes de Wedderburn, de Jordan-Hölder ou de Noether étendent respectivement la décomposition au cas des algèbres linéaires, des groupes ou des anneaux commutatifs. Or, l'auteur reprend de Bell l'idée qu'il y a une « caractéristique commune » à ces décompositions et que celle-ci s'exprime en termes de treillis [Vuillemin inédit, 332]. Effectivement, ces théorèmes disposent tous d'une formulation grâce aux treillis [15]. La décomposition de structures par les treillis est donc effective. Ainsi, conclut Vuillemin,

> le problème de la décomposition unique d'une théorie scientifique ou d'un système déductif permet de formuler de façon enfin précise et objective le problème classique de l'« analyse » philosophique et de donner un statut autre qu'imaginaire ou qu'analogique aux anciennes notions d'idées « simples » et complexes et de réduction du complexe au simple. [Vuillemin inédit, 332]

Le but de l'algèbre générale est ainsi de décomposer les théories scientifiques, c'est-à-dire d'étudier le treillis des sous-structures de la structure formalisant la théorie voulue.

La présentation des treillis dans *La Philosophie de l'algèbre*, t. II, est donc orientée vers les théorèmes de décomposition. Après avoir défini les treillis, Vuillemin traite de « quelques treillis particuliers et des théorèmes correspondants de décomposition » [Vuillemin inédit, 342]. Il choisit ainsi des types de treillis remarquables selon les théorèmes de décomposition qu'ils permettent d'obtenir. Il explique que

> [l]a méthode consistera donc à enrichir peu à peu le système des axiomes auquel devra correspondre un treillis et à examiner sur celui-ci quel type de décomposition il permet. Cette méthode utilise elle-même constamment le procédé de la représentation [...]. En effet, il est en général aisé de trouver pour une structure algébrique formelle, telle qu'un treillis plus ou moins spécialisé, un ou plusieurs « modèles » isomorphes à cette structure. Pour que l'isomorphisme soit toutefois assuré entre la structure et le modèle – ce modèle pouvant lui-même être abstrait et étant désigné par le mot plus général de représentation –, il faut toutefois s'assurer que toute structure de représentation est isomorphe à la structure de départ. [Vuillemin inédit, 341–341a]

Il s'agit, d'une part, de trouver les treillis convenables pour énoncer tel ou tel théorème de décomposition et, d'autre part, de trouver une structure concrète (une représentation) vérifiant les axiomes du treillis ainsi trouvé. Par exemple, explique Vuillemin, un treillis distributif est représenté par un anneau d'ensembles [16]. De plus, dans un treillis distributif, tout élément peut être décomposé (de manière unique) en une union de points [17]. Le deuxième exemple donné par Vuillemin est celui des algèbres de Boole. Elles sont introduites à partir d'exemples sur les ensembles et l'essentiel de la section sert à montrer le théorème de représentation d'une algèbre de Boole (vu dans la section 2.2). En effet, Vuillemin cherche à formaliser la logique grâce aux

15. Par exemple, voir [Birkhoff 1948, 94, 87–89 et 93].
16. Comme nous l'avons vu dans la section 2.2.
17. Dans un treillis, un point est un élément strictement supérieur à l'élément minimal O et n'étant supérieur à aucun autre élément que O.

treillis, il souligne donc que les algèbres de Boole jouent un rôle crucial dans « la logique des classes » (c'est-à-dire le calcul sur les ensembles) et que « [l]e théorème de Stone servira, en Logique, pour décider si un système déductif est catégorique [18] » [Vuillemin inédit, 354a]. Après un exposé mathématique sur les treillis, il revient ainsi à son principal objectif : la formalisation de la logique, qui permet l'étude algébrique des systèmes déductifs.

Vuillemin envisage la décomposition d'une structure algébrique comme une formulation mathématique de la réduction d'une vérité complexe en propositions simples. Dans ce contexte, les treillis jouent un rôle privilégié puisqu'ils fournissent le cadre adéquat pour énoncer les théorèmes de décomposition. De plus, les treillis comme les algèbres de Boole peuvent être constitués d'objets logiques et sont représentés par des structures composées d'ensembles. La théorie des treillis est ainsi une algèbre de l'algèbre et une théorie abstraite de la logique.

4 Conclusion

Les treillis occupent dans *La Philosophie de l'algèbre*, t. II, une place éminente puisqu'ils permettent l'unification des différentes théories algébriques. En cela, Vuillemin reprend le point de vue de Birkhoff dans *Lattice Theory*. Premièrement, les treillis sont présentés comme des structures algébriques au même titre que les groupes ou les anneaux. Vuillemin le justifie de la même manière que Birkhoff : il s'agit dans tous les cas d'ensembles d'éléments munis d'opérations. Deuxièmement, les treillis sont inscrits dans une histoire de l'algèbre qui progresse de l'algèbre des équations vers l'algèbre abstraite pour aboutir à l'algèbre générale. En particulier, Vuillemin utilise régulièrement la figure de Dedekind en faisant des treillis une généralisation de ses travaux. Il établit en même temps une continuité entre les différentes algèbres (par exemple, les outils de l'algèbre générale sont ceux de l'algèbre abstraite) et une rupture (l'algèbre générale est algèbre de l'algèbre et non des structures particulières). Cet effet de continuité et de rupture est également présent chez Birkhoff, qui revendique à la fois un héritage allemand (l'algèbre abstraite) et un héritage anglo-saxon (l'algèbre de la logique). Troisièmement, les treillis permettent une réflexivité de l'algèbre en tant que structures (éventuellement) composées de structures ; ce qui fait de la théorie des treillis une algèbre de l'algèbre. Dans son premier article sur les treillis, Birkhoff introduisait les treillis comme des objets composés des sous-algèbres d'une algèbre. Il s'agissait alors de légitimer et de motiver l'utilisation des treillis. Enfin, Vuillemin

18. Vuillemin appelle « catégorique » un système dans lequel on peut toujours décider si une proposition est vraie ou fausse, voir [Vuillemin 1962, 498], [Vuillemin inédit, 360]. En langage moderne, si par « vrai » et « faux » on entend « démontrable » et « réfutable », ce système serait dit « complet syntaxiquement » (merci à David Rabouin qui a noté cette différence de vocabulaire).

s'intéresse particulièrement au rapprochement entre treillis et algèbres de Boole. Leur représentation comme structures composées d'ensembles permet de les considérer comme des formalisations de la logique, ce qui justifie son projet d'algébrisation de la philosophie.

Inversement, nous pourrions préférer insister sur ce qui distingue Vuillemin en tant que théoricien des treillis. Bien sûr, son projet philosophique influence largement sa réception des treillis. Il n'utilise véritablement qu'un seul des 16 chapitres de *Lattice Theory*, celui consacré aux applications de la théorie à l'algèbre. Son propos n'est pas de faire une présentation de l'ensemble de la théorie. Il se concentre sur les théorèmes de décomposition (à la manière d'Ore) qui se trouvent majoritairement dans le chapitre en question. En revanche, il leur donne une portée qui dépasse le cadre proprement algébrique : servir à l'étude des théories scientifiques. Pour finir, l'inscription du texte de Vuillemin dans le paysage mathématique français mériterait une étude plus poussée. D'une part, il emploie le terme « treillis [19] », introduit par Châtelet [Dubreil-Jacotin, Lesieur *et al.* 1953, vii] et utilisé par le couple Dubreil-Jacotin, mais son concept fondamental est le treillis et non la relation. D'autre part, il n'utilise pas le terme « espace réticulé » de Bourbaki, donne une définition en termes d'opérations algébriques des treillis et leur accorde une importance qui n'apparaît pas chez Bourbaki.

Bibliographie

Audin, Michèle [2010], *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991)*, Paris : Société Mathématique de France.

Bell, Eric T. [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2e éd.

Birkhoff, Garrett [1933], On the combination of subalgebras, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 29(4), 441–464, doi : 10.1017/S0305004100011464.

—— [1934], Note on the paper "On the combination of subalgebras", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30(2), 200, doi : 10.1017/S0305004100016625.

—— [1935], On the structure of abstract algebras, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4), 433–454, doi : 10.1017/S0305004100013463.

—— [1937], Rings of sets, *Duke Mathematical Journal*, 3(3), 443–454, doi : 10.1215/S0012-7094-37-00334-X.

19. Initialement, Vuillemin avait choisi le terme « *lattice* » (emprunté à l'anglais) mais a presque systématiquement corrigé ensuite par « treillis ».

—— [1940], *Lattice Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, New York : American Mathematical Society.

—— [1944], Subdirect unions in universal algebra, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(10), 764–768, doi : 10.1090/S0002-9904-1944-08235-9.

—— [1945], Universal algebra, dans *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress*, Toronto : Toronto University Press, 310–326.

—— [1948], *Lattice Theory*, New York : American Mathematical Society, 2e éd.

Bourbaki, Nicolas [1957], *Éléments de mathématiques*, t. IV : Structures, Paris : Hermann.

—— [NAa], Théorie des ensembles (état 5), http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/PDF/170_nbr_071.pdf.

—— [NAb], Théorie des ensembles (état 6), http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/PDF/189_nbr_092.pdf.

Châtelet, Albert [1945], *Éléments d'algèbre*, Paris : Bourdellier.

—— [1946], *Éléments d'algèbre*, Paris : Université de Paris, faculté des sciences.

—— [1947*a*], Algèbre des relations de congruence, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 3ee série, 64, 339–368, doi : 10.24033/asens.953.

—— [1947*b*], Les théoremes de Jordan-Hölder et Schreier, *La Revue Scientifique*, 85, 5e série, 579–596.

Corry, Leo [2004], *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Bâle ; Boston ; Berlin : Springer, 2e éd.

Decaens, Simon [2018], *Une histoire de la théorie des treillis au sein de l'American Mathematical Society entre 1933 et 1948*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Dedekind, Richard [1930-1932], *Gesammelte mathematische Werke*, Braunschweig : Vieweg und Sohn, sous la dir. de R. Fricke, E. Noether et Ø. F. Ore.

Dubreil, Paul [1946], *Algèbre. Tome 1 : Équivalences, opérations, groupes, anneaux, corps*, Gauthier-Villars.

Dubreil-Jacotin, Marie-Louise, Lesieur, Léonce *et al.* [1953], *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris : Gauthier-Villars.

Eckes, Christophe [à paraître], Philosophical and mathematical duality in Albert Lautman's work, dans *Duality in 19th and 20th Century Mathematical Thinking*, édité par R. Krömer, E. Haffner & K. Volkert, Bâle : Birkhäuser.

Fisher, Charles S. [1966], The death of a mathematical theory : A study in the sociology of knowledge, *Archive for History of Exact Sciences*, 3(2), 137–159, doi : 10.1007/BF00357267.

—— [1967], The last invariant theorists : A sociological study of the collective biographies of mathematical specialists, *European Journal of Sociology*, 8(2), 216–244, doi : 10.1017/S0003975600001521.

Gauthier, Sébastien [à paraître], Albert Châtelet : de la théorie des nombres à la politique universitaire, dans *La Grande Guerre des mathématiciens français*.

Gauthier, Sébastien & Goldstein, Catherine [2013], Portrait of Albert Châtelet (1883-1960), en ligne, URL www.icmihistory.unito.it/portrait/chatelet.php.

Glivenko, Valère [1938], *Théorie générale des structures*, *Actualités scientifiques et industrielles*, t. 652, Hermann.

Goldstein, C. [2007], Du Rhin et des nombres : quelques réflexions sur l'usage de la notion de transfert culturel en histoire des mathématiques, dans *Sciences et frontières : délimitations du savoir, objets et passages*, édité par P. Hert & M. Paul-Cavallier, Fernelmont : Éditions modulaires européennes, 342–376.

Grätzer, George [1996], *General Lattice Theory*, Bâle : Birkhäuser, 2e éd.

Haffner, Emmylou [2019], From modules to lattices : Insight into the genesis of Dedekind's *Dualgruppen*, *British Journal for the History of Mathematics*, 34(1), 23–42, doi : 10.1080/17498430.2018.1555928.

Hollings, Christopher D. [2014], *Mathematics Across the Iron Curtain. A History of the Algebraic Theory of Semigroups*, Providence : American Mathematical Society.

Lautman, Albert [2006], *Les Mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris : Vrin, chap. Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique, 265–300, 1re publication Paris : Herman, 1946.

Maronne, Sébastien [2014], Pierre Samuel et Jules Vuillemin, mathématiques et philosophie, dans *Des mathématiques en Auvergne : histoire, progrès, interactions*, édité par Th. Lambre, Clermont-Ferrand : *Revue d'Auvergne*, t. 1, 151–173.

Mehrtens, Herbert [1979], *Die Entstehung der Verbandstheorie*, *Arbor scientiarum. Reihe A ; Beiträge zur Wissenschaftgeshichte*, t. 6, Hildesheim : Gerstenberg.

—— [1996], Modernism vs counter-modernism, nationalism vs internationalism : style and politics in mathematics 1900-1950, dans *L'Europe mathématique. Histoires, mythes, identités*, édité par C. Goldstein, J. Gray & J. Ritter, Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 517–529.

Nabonnand, Philippe, Peiffer, Jeanne *et al.* [2015], Circulations et échanges mathématiques (18^{e}-20^{e} siècle), *Philosophia Scientiæ*, 19(2), 7–16, doi : 10.4000/philosophiascientiae.1082.

Ore, Øystein [1935], On the foundation of abstract algebra. I, *Annals of Mathematics*, 36(2), 406–437, doi : 10.2307/1968580.

—— [1936*a*], *L'Algèbre abstraite*, Actualités Scientifiques et Industrielles : Exposés d'analyse générale, Paris : Hermann.

—— [1936*b*], On the decomposition theorems of algebra, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1, 297–307, URL www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1936.1/ICM1936.1.ocr.pdf.

Parshall, Karen Hunger [1996], How we got where we are : An international overview of mathematics in national contexts (1875-1900), *Notices of the American Mathematical Society*, 43(3), 287–296, URL www.ams.org/journals/notices/199603/parshall.pdf.

Radtka, Catherine [2018], Aspects d'une trajectoire mathématique dans la france d'entre-deux-guerres : l'édition et le tournant pédagogique d'albert chaâtelet, *Philosophia Scientiæ*, 22(1), 143–161, doi : 10.4000/philosophiascientiae.1330.

Serfati, Michel [2013], Sur l'abstrait et le concret en mathématiques, et l'axiomatique, dans l'œuvre de Marshall Stone, *Notae Philosophicae*, 2, 175–191.

Stone, Marshall H. [1934], Boolean algebras and their application to topology, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20(3), 197–202, doi : 10.1073/pnas.20.3.197.

—— [1935], Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 21(2), 103–105, doi : 10.1073/pnas.21.2.103.

—— [1937], Applications of the theory of boolean rings to general topology, *Transactions of the American Mathematical Society*, 41, 375–481.

van der Waerden, Bartel Leendert [1930], *Moderne Algebra*, Berlin : Springer.

Vuillemin, Jules [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.

—— [inédit], *La Philosophie de l'algèbre.* II. Structure, infini, ordre, non publié.

Whitehead, Alfred North [1898], *A Treatise on Universal Algebra*, Cambridge : Cambridge University Press.